Universität Bielefeld
Technische Fakultät

R|V|S

Rechnernetze und
Verteilte Systeme

Technische Informatik I

Vorlesung 4: Vereinfachung von Schaltfunktionen

Mirco Hilbert
mail@Mirco-Hilbert.de

Übersicht

- Normalformen
  - disjunktive Normalform
  - konjunktive Normalform
- Vereinfachung von Schaltfunktionen
- Systematische Verfahren zur Vereinfachung von Schaltfunktionen
  - Karnaugh-Diagramme
  - Quine-McCluskey-Verfahren
- Synthese von Schaltwerken

Literale

Definition (Literal)

Die Konstanten 0 und 1 sowie alle Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und negierten Variablen $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ heißen Literale.

1 und $x_1, \ldots, x_n$ heißen **positive Literale**.

0 und $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}$ heißen **negative Literale**.

Terme

Definition (Term)

- Die Konstanten 0 und 1 sowie alle Variablen $x_1, \ldots, x_n$ heißen **Terme**.
- Ist t ein Term, dann ist auch $(\neg t)$ ein Term.
- Sind t_1 und t_2 Terme, dann sind auch $(t_1 \wedge t_2)$ und $(t_1 \vee t_2)$ Terme
- Wir lassen die Parenthese weg, falls der Term ohne Parenthese noch eindeutig ist
- Aber was bedeutet $x \wedge y \vee x$?

  Gleich x? Oder gleich $x \vee y$?

DNF: Beispiel

$$(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3})$$

ist in DNF mit

$$\begin{aligned} l_{11} &= x_1 \\ l_{12} &= \overline{x_2} \\ l_{21} &= \overline{x_1} \\ &\vdots \\ l_{32} &= \overline{x_3} \end{aligned}$$

Disjunktive Normalform

Definition (Disjunktive Normalform)

Ein Term ist in **disjunktiver Normalform** (**DNF**) gdw. er eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, d.h.

$t = t_1 \vee t_2 \vee \ldots \vee t_n \qquad n \geq 1$

mit $t_i = (l_{i1} \wedge l_{i2} \wedge \ldots \wedge l_{i\,m_i}) \qquad 1 \leq i \leq n$ und $m_i \geq 1$

wobei die l_{ij} Literale sind.

Etwas kompakter geschrieben, bedeutet das:

$$t = \bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij} \qquad \text{mit } l_{ij} \text{ Literal}$$

Konjunktive Normalform

Definition (Konjunktive Normalform)

Analog zur DNF ist ein Term *t* in **konjunktiver Normalform (KNF)** gdw. er eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, also

$$t = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij} \qquad \text{mit } l_{ij} \text{ Literal}$$

Fundamentaler Satz für bool‘sche Normalformen

Zu jedem Term, d.h. zu jeder *n*-stelligen Schaltfunktion, gibt es einen äquivalenten Term in DNF und einen äquivalenten Term in KNF.

Algorithmus zur Herstellung einer DNF

Algorithmus zur Herstellung einer DNF aus einem beliebigen Term *t*

oZiel: eine Negation steht nur noch vor Variablen. Ersetze in *t* jedes Vorkommen eines Teilterms der Form

$$\begin{array}{cccl} \overline{\overline{t_1}} & \text{durch} & t_1 & \text{(Involution)} \\ \overline{t_1 \wedge t_2} & \text{durch} & \overline{t_1} \vee \overline{t_2} & \text{(De Morgan)} \\ \overline{t_1 \vee t_2} & \text{durch} & \overline{t_1} \wedge \overline{t_2} & \text{(De Morgan)} \end{array}$$

bis kein derartiger Teilterm mehr vorkommt.

Algorithmus zur Herstellung einer DNF

2 Ersetze in *t* jedes Vorkommen eines Teilterms der Form

$$t_1 \wedge (t_2 \vee t_3) \quad \text{durch} \quad (t_1 \wedge t_2) \vee (t_1 \wedge t_3)$$

$$(t_1 \vee t_2) \wedge t_3 \quad \text{durch} \quad (t_1 \wedge t_3) \vee (t_2 \wedge t_3)$$

(Distributivgesetz)

bis kein derartiger Teilterm mehr vorkommt.

Algorithmus zur Herstellung einer DNF

Achtung:

- der Algorithmus kann exponentiellen Aufwand bedeuten (z.B. Konversion eines Terms in KNF in eine DNF-Form)

Beispiel: KNF $\rightarrow$ DNF (1)

$$
\begin{aligned}
& (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \\
= \quad & (((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge x_1) \vee ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3))) \\
& \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \\
= \quad & ((x_1 \wedge x_1) \vee ((x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge x_1) \vee ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3))) \\
& \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \\
= \quad & ((x_1 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1) \vee ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3))) \\
& \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \\
= \quad & (\quad (x_1 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1) \\
& \quad \vee ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge \overline{x_2}) \vee ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge x_3) \ ) \\
& \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})
\end{aligned}
$$

Beispiel: KNF $\rightarrow$ DNF (2)

$$
\begin{aligned}
= \quad & (\quad (x_1 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee ((x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge \overline{x_2}) \\
& \quad \vee ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge x_3) \;) \\
& \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \\
= \quad & (\quad (x_1 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2}) \\
& \quad \vee ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge x_3) \;) \\
& \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \\
= \quad & (\quad (x_1 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2}) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge x_3) \vee ((x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge x_3) \;) \\
& \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})
\end{aligned}
$$

Beispiel: KNF → DNF (3)

$$
\begin{aligned}
= \quad & (\quad (x_1 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2}) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_3} \wedge x_3) \ ) \\
& \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \\
= \quad & ((\quad (x_1 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2}) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_3} \wedge x_3) \ ) \wedge \overline{x_1}) \\
& \vee ((\quad (x_1 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_1) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2}) \\
& \quad \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_3} \wedge x_3) \ ) \wedge \overline{x_2})
\end{aligned}
$$

Beispiel: KNF $\rightarrow$ DNF (4)

$$
\begin{aligned}
= \quad & (x_1 \wedge x_1 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_2 \wedge x_1 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1 \wedge \overline{x_1}) \\
\vee \ & (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \\
\vee \ & (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}) \\
\vee \ & (x_1 \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}) \\
\vee \ & (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_2}) \\
\vee \ & (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}) \\
= \quad & (x_1 \wedge 0) \vee (x_2 \wedge 0) \vee (\overline{x_3} \wedge 0) \\
\vee \ & (\overline{x_2} \wedge 0) \vee (0 \wedge \overline{x_1}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \\
\vee \ & (x_3 \wedge 0) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}) \vee (0 \wedge \overline{x_1}) \\
\vee \ & (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge 0) \vee (\overline{x_3} \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}) \\
\vee \ & (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (0 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2}) \\
\vee \ & (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_3 \wedge 0) \vee (0 \wedge \overline{x_2}) \\
= \quad & 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee 0 \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}) \vee 0 \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee 0 \\
\vee \ & (\overline{x_3} \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee 0 \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}) \vee 0 \vee 0 \\
= \quad & (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \\
\vee \ & (\overline{x_3} \wedge x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_3} \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2})
\end{aligned}
$$

Effizienzbetrachtung

- Achtung! Exponentiell heißt impraktikabel!

#Variablen	#Operationen zur Vereinfachung
n	worst case > 2^n
1	> 2
3	> 8
8	> 256
12	> 4K
16	> 64K
32	> 4G
64	> 4G · 4G

- Ampelbeispiel: 8 Eingangsvariablen
- DEP-Decoder: 16 Funktionen mit je 12 Eingangsvariablen

Minterm

Definition (Minterm)

Ein Term ist ein **Minterm**, wenn er eine Konjunktion aller in der Schaltfunktion betrachteten Literale ist.

Es gilt:

$$\text{minterm } (b_1, \ldots, b_n) = (l_1 \wedge \ldots \wedge l_n)$$

$$\text{mit } l_i = \begin{cases} x_i \text{ falls } b_i = 1 \\ \overline{x_i} \text{ falls } b_i = 0 \end{cases}$$

Minterm: Beispiel

$$\text{minterm}(0,1,1) = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3)$$

Beobachtung:

minterm(0, 1, 1) ist nur 1 für die Belegung (0, 1, 1) der Eingangsvariablen.

Maxterm

Definition (Maxterm)

Analog zum Minterm ist ein **Maxterm** eine Disjunktion aller in der Schaltfunktion betrachteter Literale.

Es gilt:

$$\text{maxterm}\ (b_1, \ldots, b_n) = (l_1 \vee \ldots \vee l_n)$$

$$\text{mit}\ l_i = \begin{cases} x_i \text{ falls } b_i = 1 \\ \overline{x_i} \text{ falls } b_i = 0 \end{cases}$$

Wertetabelle $\leftrightarrow$ DNF

- Nach dem Fundamentalen Satz für bool'sche Normalformen läßt sich jede *n*-stellige Schaltfunktion in DNF darstellen.
- Über eine Wertetabelle kann man auf einfache Weise die Schaltfunktion in DNF herstellen, indem man zu jeder Variablenbelegung (d.h. Zeile in der Wertetabelle) die Konjunktion von Funktionswert und Minterm bildet und diese $\wedge$-Terme miteinander ver-**ODER**-t.
- Schauen wir uns das an einem einfachen Beispiel an.

Beispiel - Wertetabelle

- Eine Schaltfunktion sei durch ihre Wertetabelle gegeben:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f(0,0) \wedge \mathsf{minterm}(0,0) = 0 \wedge (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})$$
$$f(0,1) \wedge \mathsf{minterm}(0,1) = 1 \wedge (\overline{x_1} \wedge x_2)$$
$$f(1,0) \wedge \mathsf{minterm}(1,0) = 1 \wedge (x_1 \wedge \overline{x_2})$$
$$f(1,1) \wedge \mathsf{minterm}(1,1) = 0 \wedge (x_1 \wedge x_2)$$

Beispiel - DNF

- Durch Disjunktion der einzelnen Zeilen erhält man die zugehörige Schaltfunktion in DNF:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) = \quad & (0 \wedge (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})) \vee (1 \wedge (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2})) \\
\vee\ & (1 \wedge (x_1 \wedge \overline{x_2})) \vee (0 \wedge (x_1 \wedge x_2)) \\
= {} & 0 \ \vee \ (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \ \vee \ (x_1 \wedge \overline{x_2}) \ \vee \ 0 \\
= {} & (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \ \vee \ (x_1 \wedge \overline{x_2})
\end{aligned}
$$

Kanonische disjunktive Normalform

Definition (Kanonische Disjunktive Normalform)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{b_1 \ldots b_n \in \mathbf{2}^n} (f(b_1, b_2, \ldots, b_n) \wedge \mathsf{minterm}(b_1, \ldots, b_n))$$

wobei die $b_1 \ldots b_n \in \mathbf{2}^n$ alle möglichen Belegungen der Eingangsvariablen sind, heißt **vollständige** oder **kanonische disjunktive Normalform**.

Beispiel - Wertetabelle

- Eine Schaltfunktion sei durch ihre Wertetabelle gegeben:

x_3	x_2	x_1	$f(x_1, x_2, x_3)$	minterm(x_1, x_2, x_3)
0	0	0	1	$\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}$
0	0	1	0	$\overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1$
0	1	0	0	$\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}$
0	1	1	0	$\overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1$
1	0	0	0	$x_3 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}$
1	0	1	1	$x_3 \wedge \overline{x_2} \wedge x_1$
1	1	0	0	$x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}$
1	1	1	1	$x_3 \wedge x_2 \wedge x_1$

Beispiel - KDNF

- Dadurch ergibt sich die folgende KDNF

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) = \quad & (1 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \\
\vee \ & (0 \wedge \overline{x_3} \wedge \overline{x_2} \wedge x_1) \\
\vee \ & (0 \wedge \overline{x_3} \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \\
\vee \ & (0 \wedge \overline{x_3} \wedge x_2 \wedge x_1) \\
\vee \ & (0 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_1}) \\
\vee \ & (1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2} \wedge x_1) \\
\vee \ & (0 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge \overline{x_1}) \\
\vee \ & (1 \wedge x_3 \wedge x_2 \wedge x_1)
\end{aligned}
$$

Beispiel - Vereinfachung der KDNF

- Da die 0-Terme bei der Disjunktion keine Rolle spielen, lässt sich die KDNF folgendermaßen vereinfachen:

$$f(x_1, x_2, x_3)$$
$$= (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee \underbrace{(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)}_{(x_1 \wedge x_3)}$$
$$= (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_3)$$

- Im zweiten Schritt wurden die letzten Terme zusammengefasst, da sie sich nur dadurch unterscheiden, dass x_2 einmal als positives und einmal als negatives Literal auftritt.

Zusammenfassen von Teiltermen

- Die eben angewendete Regel lässt sich wie folgt verallgemeinern:
  Terme der Art

$$\ldots \vee (t_1 \wedge \ldots \wedge t_{i-1} \wedge x_i \wedge t_{i+1} \wedge \ldots \wedge t_n) \vee \ldots$$
$$\ldots \vee (t_1 \wedge \ldots \wedge t_{i-1} \wedge \overline{x_i} \wedge t_{i+1} \wedge \ldots \wedge t_n) \vee \ldots$$

  können zusammengefasst werden zu:

$$\ldots \vee (t_1 \wedge \ldots \wedge t_{i-1} \wedge t_{i+1} \wedge \ldots \wedge t_n) \vee \ldots$$

Zusammenfassen von Teiltermen

- Beweis:

$(A \wedge x \wedge B) \vee (A \wedge \neg x \wedge B)$

$= \quad (A \wedge B \wedge x) \vee (A \wedge B \wedge \neg x)$ (Kommutativität)

$= \quad (A \wedge B) \wedge (x \vee \neg x)$ (Distributivität)

$= \quad (A \wedge B) \wedge 1$ (selber prüfen!)

$= \quad (A \wedge B)$ (selber prüfen!)

Karnaugh-Diagramme

- graphische Darstellung einer Schaltfunktion äquivalent zu Wertetabelle oder Normalform
- geeignet um Schaltfunktionen mit bis zu $n = 4$ Eingangsvariablen zu vereinfachen
- Funktionswerte werden in ein Diagramm mit 2^n Feldern eingetragen
- durch Blockbildung können mehrere Minterme zu einem einfacheren Term zusammengefasst werden

K-Diagramm für zwei Eingangsvariablen

- Tabellen-Schema für zwei Variablen:

$x_2 \backslash x_1$	0	1
0	$f(0,0)$	$f(1,0)$
1	$f(0,1)$	$f(1,1)$

- Minterme der einzelnen Tabellenzellen:

$f(0,0)$: $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$ $\quad$ $f(1,0)$: $x_1 \wedge \overline{x_2}$

$f(0,1)$: $\overline{x_1} \wedge x_2$ $\quad$ $f(1,1)$: $x_1 \wedge x_2$

K-Diagramm für drei Variablen

- Tabellen-Schema für drei Variablen:

$x_3 \backslash x_2, x_1$	$0,0$	$0,1$	$1,1$	$1,0$
0	$f(0,0,0)$	$f(1,0,0)$	$f(1,1,0)$	$f(0,1,0)$
1	$f(0,0,1)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,1)$	$f(0,1,1)$

- Wertebelegungen für x_2, x_1 werden gemäß Gray-Code angeordnet:
  Zwei aufeinander folgende Spalten unterscheiden sich in genau einem Bit
- Achtung! Variablenreihenfolge!

K-Diagramm für vier Variablen

- Tabellen-Schema für vier Variablen:

$x_4, x_3 \setminus x_2, x_1$	$0,0$	$0,1$	$1,1$	$1,0$
$0,0$	$f(0,0,0,0)$	$f(1,0,0,0)$	$f(1,1,0,0)$	$f(0,1,0,0)$
$0,1$	$f(0,0,1,0)$	$f(1,0,1,0)$	$f(1,1,1,0)$	$f(0,1,1,0)$
$1,1$	$f(0,0,1,1)$	$f(1,0,1,1)$	$f(1,1,1,1)$	$f(0,1,1,1)$
$1,0$	$f(0,0,0,1)$	$f(1,0,0,1)$	$f(1,1,0,1)$	$f(0,1,0,1)$

- Wertebelegungen für x_2, x_1 sowie für x_4, x_3 werden gemäß Gray-Code angeordnet
- Achtung! Variablenreihenfolge!

K-Diagramme: Beispiel 1

- Schaltfunktion

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_1 \wedge x_2)$$

Wertetabelle:

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Eintrag in das K-Diagramm:

$x_2 \backslash x_1$	0	1
0	0	1
1	0	1

- vereinfachte Schaltfunktion

$$f(x_1, x_2) = x_1$$

K-Diagramme: Beispiel 2

- Schaltfunktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3)$$

- K-Diagramm

x_3 \ x_2, x_1	$0, 0$	$0, 1$	$1, 1$	$1, 0$
0	0	1	0	1
1	0	1	0	1

- vereinfachte Schaltfunktion

$$f(x_1, x_2) = (\overline{x_2} \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge \overline{x_1})$$

K-Diagramme: Beispiel 3

- Schaltfunktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

- K-Diagramm

x_3 \ x_2, x_1	$0,0$	$0,1$	$1,1$	$1,0$
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

- Die Schaltfunktion ist durch das K-Diagramm nicht weiter vereinfachbar

K-Diagramme: Unterbestimmte Funktion

- Eingangswertkombinationen, für die der Funktionswert nicht festgelegt ist, können zur Blockbildung mit 1 oder 0 belegt werden

x_3 \ x_2, x_1	$0,0$	$0,1$	$1,1$	$1,0$
0	0	1	1	0
1	0	1	X	0

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1$$

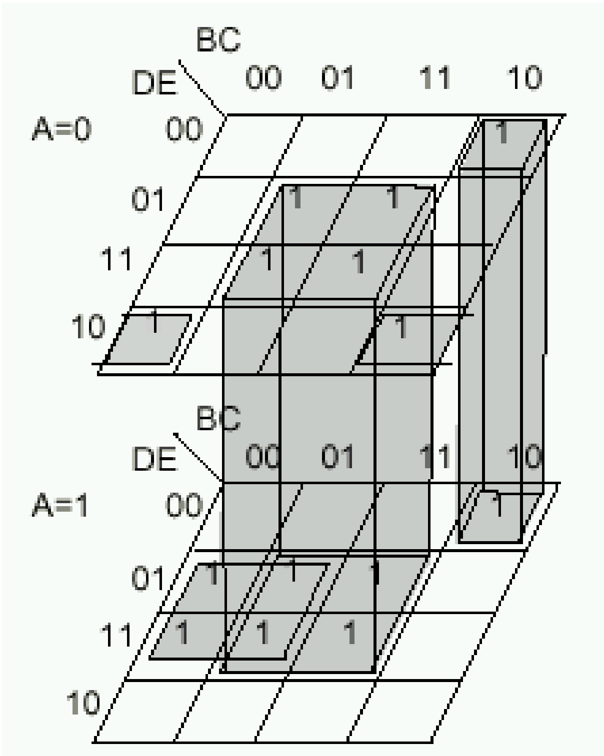
x_3 \ x_2, x_1	$0,0$	$0,1$	$1,1$	$1,0$
0	1	X	0	1
1	1	0	0	1

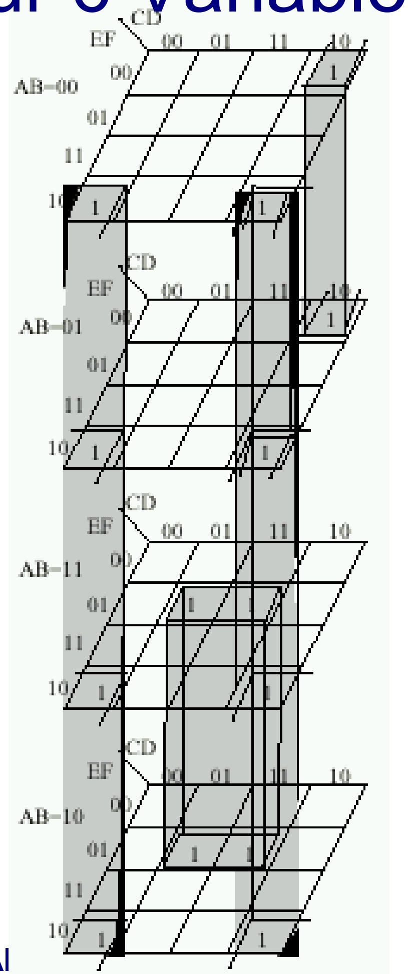
$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}$$

Nachteile und Einschränkungen von K-Diagrammen

- Ab vier Eingangsvariablen werden Karaugh-Diagramme zu unübersichtlich

  für 5 Variablen: für 6 Variablen:





Quine-McCluskey-Verfahren

1. Zeilen der Wertetabelle werden so umgeordnet, dass Gruppen aus Mintermen entstehen, die die gleiche Anzahl positiver Literale haben. Hierbei werden nur solche Zeilen betrachtet, bei denen der Funktionswert der Schaltfunktion gleich ***1*** ist.
2. Verschmelzung jeweils zweier Minterme aus unterschiedlichen Gruppen, die sich nur um die Negation genau einer Variablen unterscheiden und Streichung doppelter Zeilen.
3. Wiederholung von Schritt 2 bis keine weitere Vereinfachung mehr möglich ist.
4. Disjunktive Verknüpfung dieser nicht mehr weiter zusammenfassbaren Terme (**Primimplikanten**) ergibt vereinfachte Schaltfunktion

Quine-McCluskey - Beispiel 1

- ursprüngliche Wertetabelle

Zeile	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

Quine-McCluskey - Beispiel 1

- Schritt 1: Umordnung

Zeile	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	
4	1	0	0	1	1 positives Literal
5	1	0	1	1	2 positive Literale

- Schritt 2: Verschmelzung

Zeile	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
4, 5	1	0	-	1

- Schritt 4: vereinfachte Schaltfunktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) = x_1 \wedge \overline{x_2}$$

Quine-McCluskey - Beispiel 2

- ursprüngliche Wertetabelle

Zeile	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Quine-McCluskey - Beispiel 2

- Schritt 1: Umordnung

Zeile	x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	
0	0	0	0	0	1	0 positive Literale
1	0	0	0	1	1	1 positives Literal
2	0	0	1	0	1	
8	1	0	0	0	1	
3	0	0	1	1	1	2 positive Literale
9	1	0	0	1	1	
10	1	0	1	0	1	
7	0	1	1	1	1	3 positive Literale
14	1	1	1	0	1	
15	1	1	1	1	1	4 positive Literale

Quine-McCluskey - Beispiel 2

- Schritt 2: Verschmelzung

Zeile	x_1	x_2	x_3	x_4	
0, 1	0	0	0	-	0 positive Literale
0, 2	0	0	-	0	
0, 8	-	0	0	0	
1, 3	0	0	-	1	1 positives Literal
1, 9	-	0	0	1	
2, 3	0	0	1	-	
2, 10	-	0	1	0	
8, 9	1	0	0	-	
8, 10	1	0	-	0	
3, 7	0	-	1	1	2 positive Literale
10, 14	1	-	1	0	
7, 15	-	1	1	1	3 positive Literale
14, 15	1	1	1	-	

Quine-McCluskey - Beispiel 2

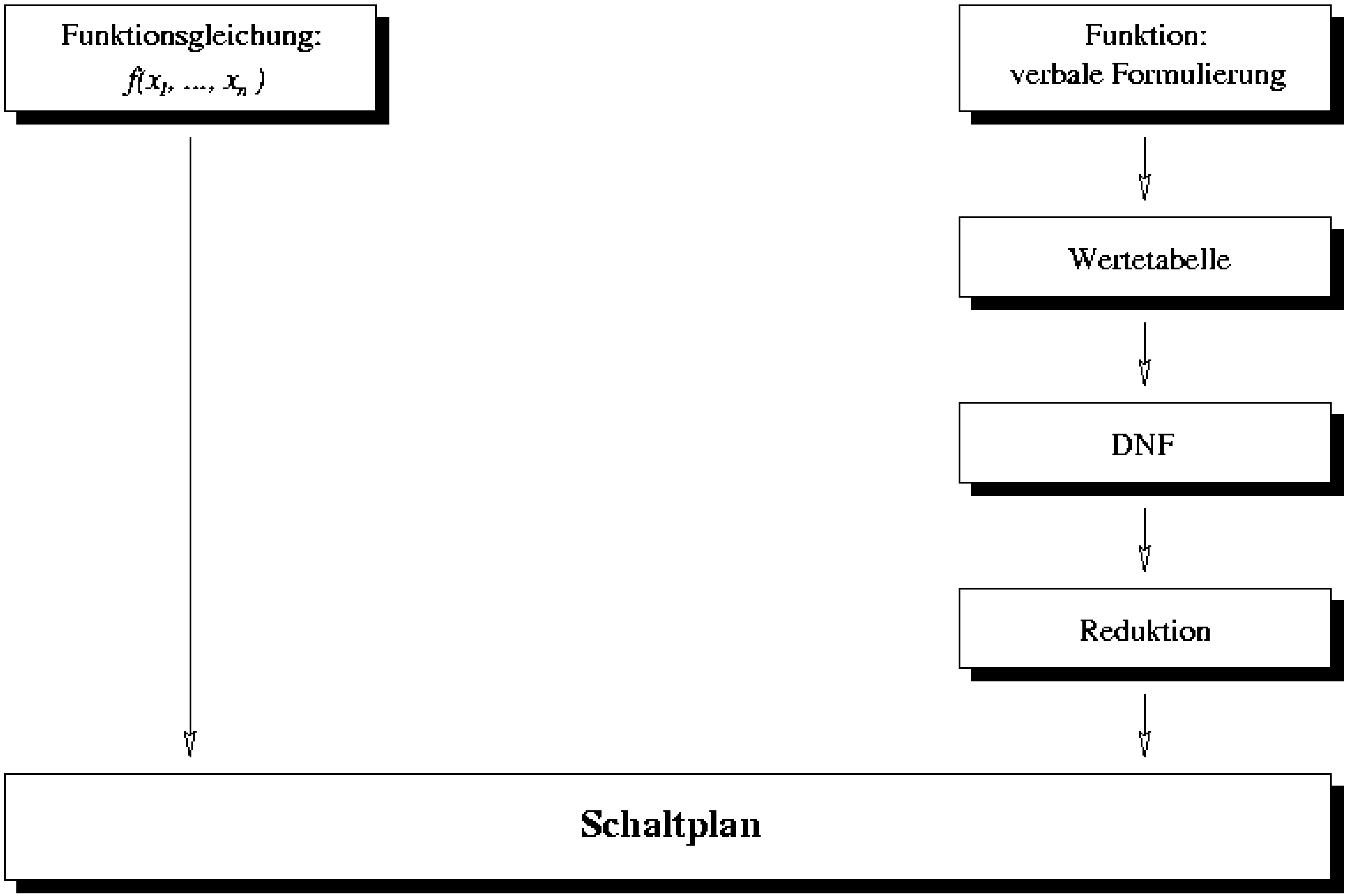
- Schritt 3 $\rightarrow$ Schritt 2: Verschmelzung

Zeile	x_1	x_2	x_3	x_4	
0, 1, 2, 3	0	0	-	-	0 positive Literale
0, 1, 8, 9	-	0	0	-	
0, 2, 8, 10	-	0	-	0	
3, 7	0	-	1	1	2 positive Literale
10, 14	1	-	1	0	
7, 15	-	1	1	1	3 positive Literale
14, 15	1	1	1	-	

- Schritt 4: vereinfachte Schaltfunktion

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \quad & (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2}) \vee (\overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_2} \wedge \overline{x_4}) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3 \wedge x_4) \\
& \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_4}) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)
\end{aligned}
$$

Synthese von Schaltwerken



Literatur und Links

- Structured Computer Organization
  Andrew S. Tanenbaum, Prentice Hall, 1999
- elearn.rvs.uni-bielefeld.de

Universität Bielefeld
Technische Fakultät

RVS
Rechnernetze und
Verteilte Systeme

Technische Informatik I

Nächste Woche:
Vorlesung 4: Schaltnetze für Arithmetik

Tim Köhler
tkoehler@TechFak.Uni-Bielefeld.de